www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ESCC ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
Association loi 1901 - 6 avenue Thiers - 60200 COMPIÈGNE - Tél.: 44.40.29.32.
Etablissement d'enseignement supérieur technique privé - mixte

CONCOURS D'ADMISSION 1990
MATHEMATIQUES
JEUDI 10 MAI 1990 de 08 H 00 à 12 H 00

Option : Générale — Coefficient : 7

Des points sont réservés à la présentation de la copie.

On demande :
1° une écriture lisible,
2° de séparer les questions,
3° de mettre en évidence les résultats,
4° d'éviter de recopier les calculs évidents,
5° d'éviter les longueurs inutiles.

PROBLEME N°1

DONNEES DU PROBLEME

a) IR [x,n] est l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

On pose : $e_0(x) = x^0 = 1$ et pour : $1 \leqslant k \leqslant n$ $e_k(x) = x^k$.

$\mathcal{B}_n = \{e_0 , e_1 , \ldots\ldots , e_n\}$ est la base canonique de IR [x,n] .

b) m, n et k sont des entiers naturels.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les coefficients a_k et $b_{m,k}$ sont réels.

La variable x est réelle.

Le polynôme nul, noté θ est élément de IR [x,n] .

Pour P élément de IR [x,n] on a les écritures : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k.x^k$ ou $P = \sum_{k=0}^{n} a_k.e_k$.

Pour P polynôme de IR [x,n] on note P(M) le polynôme matriciel défini par :

$$P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k.M^k$$

c) La famille t de trinômes est définie par : $t_m = e_2 - ((-1)^m + 5^m).e_1 + (-5)^m.e_0$

PREMIERE PARTIE

La suite réelle u est définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$u_{m+2} - 4u_{m+1} - 5u_m = 0$$

1° Calculer u_2 et u_3 .

2° Démontrer que la suite u est définie et unique.

3° On pose : $v_m = u_{m+1} + u_m$.

Démontrer que v est une suite géométrique. On donnera la raison et le premier terme.

.../...

4° Démontrer que : $u_m = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k-1} \cdot v_k$

5° En déduire l'expression de u_m en fonction de m.

DEUXIEME PARTIE

$\varphi_{m,n}$ est l'application qui à P élément de $\mathbb{R}[x,n]$, fait correspondre : $\varphi_{m,n}(P) = t_m.P$

On a $\varphi_{m,n}(P) = \sum_{k=0}^{n+2} b_{m,k} \cdot e_k$

1° Ecrire les coefficients $b_{m,k}$ en fonction de m et des coefficients a_k.

2° Démontrer que $\varphi_{m,n}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[x,n]$ dans $\mathbb{R}[x,n+2]$.

3° Quelle est la dimension de l'espace-image de $\varphi_{m,n}$, noté $\mathrm{Im}\,\varphi_{m,n}$?

4° Ecrire la matrice de $\varphi_{m,n}$ quand $\mathbb{R}[x,n]$ et $\mathbb{R}[x,n+2]$ sont rapportés aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_{n+2}$.

TROISIEME PARTIE On donne la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1° Calculer $t_1(A)$ et en déduire que $A^m = \alpha_m.A + \beta_m.I$ où α et β sont des suites.

2° Résoudre les suites α et β. Vérifier que $\alpha_m \neq 0$ et $\beta_m \neq 0$.

3° Montrer que : a) $\alpha_{2m} = ((-1)^m + 5^m) \cdot \alpha_m$

b) $\beta_{2m} = ((-1)^m + 5^m) \cdot \beta_m - (-5)^m$

4° Ecrire la matrice A^m.

5° Calculer : $t_m(A^m)$.

QUATRIEME PARTIE

$\mathbb{M}$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

$E[M,n]$ est le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x,n]$ qui admettent M pour racine.

1° m =1

a) déterminer : $E[A,0]$, $E[A,1]$ et $E[A,2]$.

b) démontrer que $E[A,n+2] = \mathrm{Im}\,\varphi_{1,n}$.

2° Etude du cas général

a) déterminer : $E[A^m,0]$, $E[A^m,1]$ et $E[A^m,2]$,

b) démontrer que $E[A^m,n+2] = \mathrm{Im}\,\varphi_{m,n}$.

.../...

PROBLEME N°2

DONNEES ET NOTATIONS :

1° n et k sont des éléments de IN .

I est un sous-ensemble de IN .

2° t est une variable réelle, α un réel non nul et Q un polynôme à coefficients réels défini par : $Q(t) = \sum_{k \in I} a_k . t^k$

3° La somme S_n et la série S sont définies par : $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k$

et $S(t) = \lim_{n \to +\infty} (S_n(t))$

4° Pour une expérience aléatoire E, on note :

* Ω le référentiel
* X la variable aléatoire réelle définie par : $X(\Omega)$ est un sous-ensemble de IN.
* pour $k \in X(\Omega)$; $P(X=k) = p_k$ est la probabilité d'avoir $X = k$.
* f_X la fonction génératrice de X définie par : $f_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} t^k . p_k$

5° $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles totalement indépendantes, égales à X.

On pose : $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

De même : Z est une variable aléatoire réelle, et Z_1, Z_2 des variables aléatoires réelles indépendantes, égales à Z. On pose : $T = Z_1 + Z_2$.

PREMIERE PARTIE

1° Reconnaître la somme $S_n(t)$ et donner son expression en fonction de n et t.

2° Quel est le domaine de convergence D de la série S ?

3° Pout $t \in D$, donner l'expression de S(t).

4° Pour $t \in]-\frac{1}{\alpha} ; \frac{1}{\alpha}[$, montrer que : $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha.t)^n = \frac{1}{1-\alpha.t}$

DEUXIEME PARTIE

1° A quelles conditions sur les coefficients a_k peut-on assimiler Q à la fonction génératrice d'une variable aléatoire X ?

.../...

2° Quelle est la loi de probabilité (X,P(X)) correspondante ?

3° Démontrer que : $E(X) = Q'(1)$ et $V(X) = Q''(1) + Q'(1) - \left(Q'(1)\right)^2$

TROISIEME PARTIE Dans cette partie : $Q(t) = a.t + b$.

1° Ecrire les conditions sur a et b pour que Q soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire X.

2° Reconnaître la loi (X, P(X)) et donner ses caractéristiques.

3° Quelle est la loi (Y, P(Y)) ? Donner ses caractéristiques.

4° Donner l'expression de la fonction génératrice f_Y de Y.

QUATRIEME PARTIE Dans cette partie : $Q(t) = (a.t + b)^n$.

1° Ecrire les conditions sur a et b pour que Q soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y.

2° Reconnaître la loi (Y, P(Y)).

(On donnera l'expression de la probabilité P(Y=k)).

CINQUIEME PARTIE

Dans cette partie, f est la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$f(t) = \frac{a.t}{1-b.t}$ où a et b sont des réels.

1° En se référant à la troisième question de la première partie et en écrivant les contraintes sur t, a et b :

montrer que f peut être assimilée à la fonction génératrice d'une variable aléatoire Z.

2° Reconnaître la loi (Z, P(Z)) et donner ses caractéristiques.

3° Quelle est la loi de probabilité (T, P(T)) ? Donner ses caractéristiques.

4° Donner l'expression de la fonction génératrice f_T de T.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail